www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours National d'admission 1989 ESCAE

MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

OPTION ÉCONOMIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet seront distribuées 4 feuilles de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation à un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

Cette épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE (*sur 4 points*)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les points Ω(40 ; 35), A(40 ; 60), B(50,5 ; 57,5), C(68 ; 45) et D(75 ; 35).

1° Écrire le système des contraintes reliant les variables x et y tel que le régionnement du plan associé à ce système donne le polygone ΩABCD.

2° x et y étant liées par les contraintes précédentes, on veut maximiser la fonction b définie par $b(x, y) = x + 2y$.

a. Déterminer la solution optimale en précisant la valeur correspondante b_0 de b.

b. Reprendre la question *a.*, en supposant de plus que x et y sont des entiers naturels.

3° x restant supérieur ou égal à 40 et y supérieur ou égal à 35, on désire augmenter la valeur de b en supprimant l'une des contraintes.

Quelle est la contrainte que l'on doit supprimer pour obtenir la valeur de b la plus élevée ?

PROBLÈME (*sur 16 points*)

Les différentes parties de ce problème sont largement *indépendantes* et peuvent donc être traitées *séparément*.

I. On donne les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1° Calculer J^2 et J^3. En déduire J^k, $k \geqslant 3$.

2° On pose $T = 2I + J$

Donner pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.

3° On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} : \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + 2c_{n-1} \end{cases}$

Donner, en utilisant le résultat du 2°, les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et n.

II. On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie par : $f(x) = 1 - 8x^2 e^{2x-1}$

On note (C) la courbe représentative de f.

fin $1 - 8x^2 e^{2x-1}$

PARTIE A

1° Étudier les branches infinies de (C).

2° Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3° Calculer $f''(x)$. Démontrer que (C) présente deux points d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

4° Construire la courbe (C) dans un repère orthonormal du plan : unité graphique : 10 cm.

On se limitera à l'intervalle $[-2,5 ; 0]$ en abscisse.

5° *a.* Calculer l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y = 1$ et les verticales $x = 0$ et $x = \lambda$ ($\lambda < 0$).

b. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale impropre : $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{2x-1}\,dx$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE B

1° $f^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de la fonction f, démontrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que :

$\forall x \in \mathbf{R} : f^{(n)}(x) = -8\, P_n(x)\, e^{2x-1}$ où P_n désigne un polynôme vérifiant la relation :

$$P_n(x) = P'_{n-1}(x) + 2\, P_{n-1}(x).$$

2° Démontrer que P_n est de degré 2. En déduire qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que :
$\forall x \in \mathbf{R} : P_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$ et vérifiant le système de la question I.

3° En déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$.

PARTIE C

1° *a.* Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Déterminer l'entier naturel p tel que :

$$\frac{p}{100} \leqslant \alpha < \frac{p+1}{100}$$

2° On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - \frac{1}{2}}{f(x) + 1}$$

a. Justifier l'existence de $g(x)$.

b. On considère la fonction h définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = f(x) + 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)$$

Étudier les variations de h. En déduire le signe de $h(x)$.

c. Démontrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{[f(x)+1]^2}$

d. En déduire que g est croissante.

3° On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n)\ ,\ n \in \mathbf{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

a. Calculer à 10^{-2} près u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N} : 0 \leqslant u_n < 0{,}4$.

c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

d. En déduire que la suite est convergente vers une limite appartenant à $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.

4° Démontrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est α, solution de l'équation $f(x) = 0$.

5° On considère les points E et M_0 de (C), courbe représentative de f, d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et x_0 avec $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

a. Écrire une équation de la droite (D_0) passant par E et M_0.

b. Soit N_1 le point d'intersection de (D_0) et de l'axe des abscisses. Démontrer que l'abscisse du point N_1 est $x_1 = g(x_0)$.

c. Démontrer que la corde M_0E est située au-dessous de (C).

d. Construire avec précision la courbe (C) dans un repère orthogonal du plan : unité en abscisse : 20 cm - unité en ordonnée : 10 cm.

On se limitera à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en abscisse.

e. En déduire une interprétation géométrique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en constatant ainsi que l'on obtient une suite de valeurs approchées par défaut de α, solution de l'équation $f(x) = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail